ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

jeudi 24 avril 1997, de 8 h à 12 h

On considère une population d'environ 10 000 consommateurs, dont chacun est susceptible d'acheter une voiture, soit de marque étrangère, soit de marque française. Un organisme de sondage interroge 100 consommateurs pris au hasard : 30 se révèlent préférer une marque étrangère (donc 70 une marque française). L'enquête est publiée et influence parfaitement - cas d'école - la population dont 30% penche maintenant pour une marque étrangère (70% pour une marque française). Un nouveau sondage est effectué : un échantillon de 100 consommateurs pris au hasard est interrogé, et le résultat publié influence parfaitement la population qui s'aligne sur les préférences de l'échantillon. On recommence le tirage au hasard de 100 consommateurs, et ainsi de suite. Que se passe-t-il après un grand nombre de sondages ?

L'énoncé théorique ci-dessous propose un modèle probabiliste pour répondre à cette question.

Définitions. Soit une variable aléatoire X ; on note $E(X)$ l'espérance de X si celle-ci existe.

On note N un entier supérieur ou égal à 2 et k_0 un entier de $\{0,..,N\}$. On pose $p = \frac{k_0}{N}$ et $q = 1-p$.

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω,A,P), à valeurs dans $\{0,..,N\}$, dont les lois de probabilité sont définies de la manière suivante:

X_0 est la variable certaine égale à k_0 .
X_1 suit la loi binomiale de paramètres N et p. (Par convention, on dit que la loi binomiale de paramètres N et 0 est la loi de la variable certaine égale à 0 et que la loi binomiale de paramètres N et 1 est la loi de la variable certaine égale à N).
Pour tout entier n non nul et tout entier k de $\{0,..,N\}$ tel que $P(X_n = k) \neq 0$, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(X_n=k)$ est la loi binomiale de paramètres N et $\frac{k}{N}$. En d'autres termes:

pour tout entier n non nul et tout entier k de $\{0,..,N\}$ tel que $P(X_n = k) \neq 0$ et pour tout entier i de $\{0,..,N\}$,

$$P(X_{n+1} = i / X_n = k) = C_N^i \left(\frac{k}{N}\right)^i \left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i}$$ (avec la convention habituelle que $0^0 = 1$).

On a de plus l'hypothèse (H): pour tout entier n non nul, pour tout n-uplet $(k_1,..,k_n)$ de $\{0,..,N\}^n$ tel que $P(X_n = k_n,..,X_1 = k_1) \neq 0$, pour tout entier i de $\{0,..,N\}$, $P(X_{n+1} = i / X_n = k_n,..,X_1 = k_1) = P(X_{n+1} = i / X_n = k_n)$.
Cette hypothèse n'est utile que pour la question 8. de la partie 2.

On définit la suite de variables aléatoires $(F_n)_{n\geq 0}$ par $F_n = \frac{X_n}{N}$.

L'énoncé ci-dessous propose une étude des cas N= 2 et N=3. Les propriétés mises en évidence par cette étude peuvent se généraliser à une valeur quelconque de N.

PRELIMINAIRE

Dans l'exemple ci-dessus, en appelant N la taille de l'échantillon, k_0 le nombre de consommateurs interrogés la première fois et favorables à l'achat d'une marque étrangère, n le rang du sondage, donner une interprétation de la variable X_n et justifier par des arguments tirés du cours, l'utilisation de la loi binomiale. Comment interpréter l'hypothèse (H)?

PARTIE 1

Dans cette partie, $N = 2$.

1) a) On suppose $k_0 = 0$. Déterminer la loi de X_1.
Que peut-on dire de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$?

b) De même si $k_0 = 2$, que peut-on dire de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$?

On suppose désormais, dans la suite de cette partie, que $k_0 = 1$.

2) a) Montrer que, pour tout entier n, $P(X_n = 1) = \frac{1}{2^n}$.

En déduire que, pour tout entier n, $P(X_n = 0) = P(X_n = 2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$.

b) Montrer que la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ converge en loi. Quelle est la loi limite ?

c) Calculer $E(X_n)$.

3) On définit la variable aléatoire T par :
si pour tout entier n, $(X_n = 1)$, alors $T = 0$
sinon, $T = n$ où n est le plus petit entier k tel que $(X_k = 0)$ ou $(X_k = 2)$.

a) Montrer que, pour tout entier n non nul, $P(T = n) = P(X_{n-1} = 1) - P(X_n = 1)$. Que vaut $P(T = 0)$?
b) Reconnaître la loi de T et déterminer $E(T)$.

PARTIE 2

Dans cette partie, $N = 3$.

1) Que dire de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ si $k_0 = 0$? Si $k_0 = 3$?

On suppose désormais, dans la suite de cette partie, que $k_0 = 1$.

2) Etant donné un entier n, déterminer $P(X_{n+1} = 0)$ en fonction des valeurs $P(X_n = k)$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.
Déterminer de même $P(X_{n+1} = 1)$, $P(X_{n+1} = 2)$, $P(X_{n+1} = 3)$.

Pour tout entier n, on pose $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$. Vérifier que $U_{n+1} = AU_n$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{27} & \frac{1}{27} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & 1 \end{pmatrix}$.

3) a) Soit le vecteur ligne $V = (0,1,2,3)$. Calculer VA.
b) Montrer que $E(X_n) = V U_n$ pour tout entier n. En déduire la valeur de $E(X_n)$.

4) a) Soit le vecteur ligne $W = (0,2,2,0)$. Calculer WA.

b)Soit n un entier naturel. Montrer que $E(X_n(3-X_n)) = W U_n$. En déduire que $E(X_n(3-X_n)) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

c) En déduire que pour tout entier n, $P(X_n = 1) + P(X_n = 2) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

d) A l'aide de 3.et 4.c., déterminer $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = i)$ pour tout entier i de $\{0, 1, 2, 3\}$.

e) Montrer que la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ converge en loi. Quelle est la loi limite?

f) Déterminer le premier entier n tel que $P(F_n = 0 \text{ ou } F_n = 1) > 0,95$.

5) a) On pose $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que Y_2 et Y_3 sont vecteurs propres de A. Quelles sont les valeurs propres associées ?
b) Déterminer une base de IR^4, formée de vecteurs propres de A. Quelles sont les valeurs propres associées ?
En déduire qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
c) Calculer A^n pour tout entier n.

6) a) Montrer que la loi de X_n est donnée par:

$$P(X_n = 0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n, \qquad P(X_n = 1) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$$

$$P(X_n = 2) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{9}\right)^n\right), \qquad P(X_n = 3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n.$$

b) Retrouver le résultat de 4.e.

7) On définit la variable aléatoire T par :
si pour tout entier n, $(X_n \neq 0)$ *et* $(X_n \neq 3)$, alors $T = 0$
sinon, $T = n$ où n est le plus petit entier k tel que $(X_k = 0)$ ou $(X_k = 3)$.
On pose, pour tout entier n, $v_n = P(X_n = 1) + P(X_n = 2)$.

a) Montrer que pour tout entier n non nul, $P(T=n) = v_{n-1} - v_n$. Que vaut $P(T=0)$?
b) Reconnaître la loi de T et donner $E(T)$.

8) Pour tout entier n non nul, on définit l'événement $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leq 1)$.

On pose $x_1 = P(X_1 = 0)$, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $x_k = P(X_1 = 1, \ldots, X_{k-1} = 1, X_k = 0)$, et pour tout entier k non nul, $y_k = P(X_1 = 1, \ldots, X_k = 1)$.

a) Exprimer pour tout entier k non nul, x_{k+1} et y_{k+1} en fonction de y_k. En déduire les valeurs de x_n et y_n pour tout entier n non nul.

b) Montrer que $P(B_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k + y_n$. En déduire $P(B_n)$ et la limite de la suite $(P(B_n))_{n\geq 1}$.

c) En déduire la probabilité qu'il existe n vérifiant $F_n > 0,5$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail